Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Período Enero-Marzo 2020

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería electrónica
Carnet: 12-10423
Twitter: @miguelangel2801

SOLUCIÓN DEL SEGUNDO PARCIAL

Enero-Marzo 2020

Pregunta 1.(6 puntos)Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$

Solución: Al evaluar se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Manipulamos la expresión para levantarla.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{(x\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1$$

Finalmente $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=1$

Pregunta 2. (5 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$

Solución: Al evaluar tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Manipulamos para levantar esta indeterminación.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}$$
$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}$$

$$= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}\right)$$
$$= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\left(\frac{1+0+0}{\sqrt{1-0+0}}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Finalmente, el límite no existe.

Pregunta 3.(5 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

Solución: Al evaluar se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Manipulamos para quitar la indeterminación.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}$$
$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x}+1}}$$

De acuerdo a la definición de valos absoluto: $|x| = -x$, si $x < 0$. Por lo que, como $x \to -\infty$, entonces:

$$= 2\lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$
$$= -2\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$
$$= -2\left(\frac{1}{\sqrt{0+1}}\right) = -2$$

Finalmente: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = -2$

Pregunta 4.(6 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to1}(1-\sqrt{x})\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

Solución: Al evaluar se obtiene una indeterminación del tipo$\frac{0}{0}$. Manipulamos la expresión para quitar la indeterminación.

$$= \lim_{x\to1}\left(1-\sqrt{x}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\right)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)$$
$$= \left(\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$

Para continuar planteamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} w = 1-x & ,x\to 1 \Leftrightarrow w\to 0 \\ x = 1-w \end{cases}$$

$$\overset{\text{cv}}{=} \frac{1}{2}\lim_{w\to 0}\frac{w}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1-w)\right)}$$

Como: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}w\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}w\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)$

$$= \frac{1}{2}\lim_{w\to 0}\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{w\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{w}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\lim_{w\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{w}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\lim_{w\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}\right)\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\lim_{w\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}}$$

Hacemos un nuevo cambio de variable: $t = \frac{\pi}{2}w$, $w\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$ por lo tanto:

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\pi}$$

Pregunta 5.(5 puntos) Demuestre mediante la definición de límite que: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x-1)(5x-4)} = 3$

Solución: Para poder demostrar que el límite existe y vale 3 es necesario encontrar los valores posibles de δ, para cada ϵ dado. Partimos dela expresión $|f(x)-L|$:

$$\left|\frac{x^3-1}{(x-1)(5x-4)}-3\right| = \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(5x-4)}-3\right| = \left|\frac{x^2+x+1}{5x-4}-3\right| = \left|\frac{x^2+x+1-3(5x-4)}{5x-4}\right| =$$
$$\left|\frac{x^2+x+1-15x+12}{5x-4}\right| = \left|\frac{x^2-14x+13}{5x-4}\right| = \left|\frac{(x-1)(x-13)}{5x-4}\right| = \frac{|x-1||x-13|}{|5x-4|}$$

De la definición, se conoce que para que $|f(x)-L|<\epsilon$ se debe tener que $|x-1|<\delta$, con lo cual: $\dfrac{|x-1||x-13|}{|5x-4|} < \dfrac{|x-13|}{|5x-4|}\delta$

Necesitamos acotar la expresión: $\dfrac{|x-13|}{|5x-4|}$.

Antes de acotar debemos fijarnos que el dominio de la función en el límite es $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}, 1\right\}$. De la definición se tiene que $|x-1| < \delta \Leftrightarrow 1-\delta < x < 1+\delta$,por lo que para que x no alcance valores que están fuera del dominio de la función se debe cumplr que $1-\delta \geqslant \frac{4}{5} \Leftrightarrow -d \geqslant \frac{4}{5}-1 \Leftrightarrow \delta \leq \frac{1}{5}$

Así, para acotar se puede usar cualquier valor de δ que esté en el intervalo $(0, \frac{1}{5}]$, en particular $\delta \leq \frac{1}{10}$.

Pedimos que $\delta \leq \frac{1}{10}$, así nos queda que:

$|x-1| < \delta \leq \dfrac{1}{10} \implies |x-1| < \dfrac{1}{10} \implies -\dfrac{1}{10} < x-1 < \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{9}{10} < x < \dfrac{11}{10}$. Ahora construimos la expresión $|x-3|$ y luiego $\dfrac{1}{|5x-4|}$.

$\dfrac{9}{10} < x < \dfrac{11}{10} \Leftrightarrow -13+\dfrac{9}{10} < x-13 < \dfrac{11}{10}-13 \Leftrightarrow -\dfrac{121}{10} < x-13 < -\dfrac{119}{10}$

Como $-\dfrac{121}{10} < x-13 < -\dfrac{119}{10} < \dfrac{121}{10} \Leftrightarrow -\dfrac{121}{10} < x-13 < \dfrac{121}{10} \Leftrightarrow |x-13| < \dfrac{121}{10}$. (Ya quedó acotado).

Ahora construimos $\dfrac{1}{|5x-4|}$:

$\dfrac{9}{10} < x < \dfrac{11}{10} \Leftrightarrow \dfrac{9}{2} < 5x < \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}-4 < 5x-4 < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < |5x-4| < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2 > \dfrac{1}{|5x-4|} > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{|5x-4|} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|5x-4|} < 2$ queda también acotado.

Finalmente teemos que $\dfrac{|x-1||x-13|}{|5x-4|} < \dfrac{|x-13|}{|5x-4|}\delta$

Ya conocemos que $|x-13| < \dfrac{121}{10}$ y $\dfrac{1}{|5x-4|} < 2$ de manera que $\dfrac{|x-13|}{|5x-4|}\delta < 28\left(\dfrac{121}{10}\right) = \dfrac{121}{5}\delta$

Para demostrar que el límite existe bastará con tomar el detla menor o igual que el valor mínimo entre $\dfrac{1}{10}$ y $\dfrac{5}{121}\epsilon$.

$\delta \leq \text{mín}\{\dfrac{1}{10}, \dfrac{5}{121}\epsilon\}$. (Nota el margen: si se toma otro valor de δ entonces la respuesta puede cambiar.)

Pregunta 6.(5 puntos) Determinar todos los valores de a y b tales que

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b & , \text{si } x > -1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = -1$.

Solución: para que f sea derivabkle en $x = -1$, debemos garantizar que también sea continua allí, por lo que estudiamos primero la continuidad en $x = -1$.

f será continua si y solo si $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

$i) f(-1)$ está definida como $f(-1) = -a + b$.

$ii) \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} ax + b = -a + b$

$\lim\limits_{x \to -1^+} ax^3 + x + 2b = -a - 1 + 2b$

Para que el límite exista y f sea continua en x=-1:

$-a + b = -a - 1 + 2b$

$-b = -1$

$b = 1$ y a puede ser cualer $\mathbb{R}$.

Estudiamos ahora la derivabilidad en $x = -1$:

f será derivable en $x = -1$ si y solo si $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ existe.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{ax + b - (-a + b)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{ax + b + a - b}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{a(x + 1)}{x + 1} = a.$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{ax^3 + x + 2b - (-a + b)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{ax^3 + x + 2b + a - b}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{ax^3 + x + b + a}{x + 1}$$

Así como están este límite no existe, haciendo que la función no sea derivable en $x = -1$. Esto debido a que no hemos aplicado la condición de continuidad: $b = 1$. Así:

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{ax^3 + a + x + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{a(x+1)(x^2 - x + 1) + x + 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{(x+1)[a(x^2 - x + 1) + 1]}{x + 1} = a(1 + 1 + 1) + 1 = 3a + 1$$

De forma que para que f sea derivable em $x = -1$:

$a = 3a + 1 \to 2a = -1 \to a = -\frac{1}{2}$.

Finalmente, para que f sea derivable en $x = -1 : a = -\frac{1}{2}$ y $b = 1$

Pregunta 7. (3 puntos) Determine los valores de θ para los cuales $\lim\limits_{x \to \theta} [\![\sin x]\!]$ donde $[\![s]\!]$ es el mayor entero menor o igual a s.

Solución: Tomando en cuenta que el seno es una función que está acotada entre $[-1, 1]$ se puede observar que, para aquellos valores de θ en los cuales la función seno cambia de ser positiva (en el intervalo mencionado) a ser negativa o viceversa, la función parte entera será discontinua. En otra palabras la función $[\![\sin x]\!]$ será discontinua cada vez que $\sin \theta = 0$.

$\sin \theta = 0$ si, $\theta = 0, \stackrel{+}{-} \pi, \stackrel{+}{-} 2\pi, \stackrel{+}{-} 3\pi ... = n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Finalmente el límite no existe para $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Este parcial fue elaborado por Miguel Labrador y digitalizado por Keily Colmenares para GUIAS USB.

Keily Colmenares
18-10208
Arquitectura

gecousb.com.ve
Síguenos por: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb.com.ve